

KONGRUENSI PADA SEMIALJABAR ATAS HEMIRING

SaniMusyafa Hikam¹, Bambang Irawanto², Solichin Zaki³
^{1,2,3}Program Studi Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

A hemiring R is called S -semialgebra if R is a left and right semi module over S satisfying $(ax)b = a(xb)$ for all $a, b \in S$ and $x \in R$. On the S -semialgebra R can be defined a congruence. A congruence on the S -semialgebra R is any congruence on the hemiring R which is both a left and right compatible for any multiplication by element of S . Therefore, the properties of congruence on a hemiring can be generalized to congruence on a semi algebra over a hemiring.

Key words :hemiring, S -semialgebra R , congruence.

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku.

Sebuah himpunan R disebut ring jika himpunan R merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan, operasi perkayaannya bersifat asosiatif, serta kedua operasi penjumlahan dan perkayaannya bersifat distributif kanan dan distributif kiri. Dari sifat-sifat ini dapat diperlemah dan menjadi struktur aljabar yang disebut semiring yang merupakan semigrup terhadap kedua operasi biner yang selanjutnya memenuhi distributif kanan dan distributif kiri. Jika suatu semiring ber elemen netral dan bersifat komutatif maka akan membentuk hemiring.

Hemiring merupakan ring yang diperlemah sebagai semigrup terhadap operasi penjumlahan, dengan kata lain hemiring merupakan ring dimana setiap elemen-elemen tidak mempunyai elemen invers penjumlahan.

Selanjutnya dari definisi hemiring dapat diperkenalkan struktur aljabar yang disebut sebagai semialjabar atas hemiring. Hemiring R dikatakan semialjabar atas S , dimana S adalah hemiring, jika R adalah semimodul kiri dan kanan atas S yang memenuhi $(ax)b = a(xb)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$.

2. SEMIALJABAR ATAS HEMIRING

Definisi 2.1 [7] Hemiring $(H, +, \cdot)$ adalah himpunan tak kosong H dengan operasi “+” dan “ $\cdot$ ” yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :

- $(H, +)$ merupakan monoid komutatif dengan elemen identitas 0.
- $(H, \cdot)$ merupakan semigrup.
- Untuk setiap $x, y, z \in H$, $x(y + z) = xy + xz$ dan $(y + z)x = yx + zx$.
- Untuk setiap $x \in H$, $x0 = 0x = 0$.

Definisi 2.2 [1] Hemiring $(H, +, \cdot)$ disebut:

- Hemiring komutatif jika $(H, \cdot)$ komutatif
- Hemiring dengan elemen satuan jika $(H, \cdot)$ punya elemen satuan
- Hemiringkanisatif penjumlahan jika $x, y, z \in H$, $x + z = y + z \Rightarrow x = y$.

Definisi 2.3 [7] Misalkan H sebuah hemiring. Diberikan M monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan dengan elemen identitas 0. Himpunan M disebut semimodul kanan atas H jika untuk setiap $a \in H$ dan $x \in M$, maka $xa \in M$ dan memenuhi aksioma-aksioma berikut

- $(x + y)a = xa + ya$
- $x(a + b) = xa + xb$
- $x(ab) = (xa)b$
- $x0 = 0a = 0$

untuk setiap $a, b \in H$ dan $x, y \in M$.

Dari definisi di atas dapat didefinisikan M semimodul kiri atas H yaitu untuk setiap $a \in H$ dan $x \in M$, maka $ax \in M$ dan memenuhi aksioma-aksioma berikut

- i. $a(x + y) = ax + ay$
- ii. $(a + b)x = ax + bx$
- iii. $(ab)x = a(bx)$
- iv. $0x = a0 = 0$

untuk setiap $a, b \in H$ dan $x, y \in M$.

Semialjabar atas hemiring merupakan struktur aljabar yang terbentuk dari dua hemiring di mana salah satu hemiringnya merupakan semimodul kanan dan semimodul kiri atas hemiring yang lain. Berikut ini akan diberikan definisi semialjabar atas hemiring.

Definisi 2.4 [7] Misalkan R sembarang hemiring (tidak harus komutatif dan mempunyai elemen satuan). Misalkan S juga hemiring. R disebut semialjabar atas S jika R adalah semimodul kiri dan semimodul kanan (bi-semimodul) atas S sedemikian hingga $(ax)b = a(xb)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$. Jika S hemiring komutatif dan R semialjabar atas S , maka dapat didefinisikan pergandaan elemen R oleh elemen-elemen S yaitu $xa = ax$ untuk $a \in S, x \in R$.

Contoh : Diberikan hemiring $\mathbb{Z}_4$ yaitu hemiring bilangan bulat modulo 4, dan $\mathbb{Z}^+$ hemiring bilangan bulat taknegatif. Hemiring $\mathbb{Z}_4$ merupakan semialjabar atas $\mathbb{Z}^+$.

3. KONGRUENSI PADASEMIALJABAR ATAS HEMIRING

Definisi 3.5 [7] Kongruensi pada semialjabar R atas S adalah kongruensi pada hemiring R , sedemikian hingga $(r, s) \in \rho, a \in S$ berarti bahwa $(ar, as) \in \rho$ dan $(ra, sa) \in \rho$.

Contoh : Diberikan hemiring $R = \mathbb{Z}_4$ yaitu hemiring bilangan bulat modulo 4, dan $S = \mathbb{Z}^+$ hemiring bilangan bulat taknegatif. Diketahui R semialjabar atas S . Relasi $\rho =$

$\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3})\}$ pada semialjabar R atas S merupakan relasi kongruensi pada semialjabar R atas S .

Definisi 3.6 [7] Kongruensi pada hemiring R dikatakan kansellatif jika untuk setiap $x, y, z \in R, (x + z, y + z) \in \rho$ berarti $(x, y) \in \rho$.

Lemma 3.7 [7] Misalkan ρ kongruensi pada hemiring R , maka $\bar{\rho}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in \bar{\rho}$ jika hanya jika terdapat $z \in R$ sedemikian hingga $(x + z, y + z) \in \rho$, adalah kongruensi kansellatif pada R yang memuat ρ .

Bukti : Untuk membuktikan lemma di atas akan ditunjukkan $\rho \subseteq \bar{\rho}$.

Diketahui $(x, y) \in \bar{\rho} \Leftrightarrow (\exists z \in R), (x + z, y + z) \in \rho$.

i). Akan ditunjukkan bahwa $(x, y) \in \rho \Rightarrow (x, y) \in \bar{\rho}$

Diambil $z = 0 \in R$ sehingga

$(x + z, y + z) \in \rho$

$(x + 0, y + 0) \in \rho$ maka $(x, y) \in \bar{\rho}$

ii). Akan ditunjukkan bahwa $(x + z, y + z) \in \rho \Rightarrow (x, y) \in \bar{\rho}$

Diambil sembarang $u \in R$ sehingga

$((x + z) + u, (y + z) + u) \in \rho$

$(x + (z + u), y + (z + u)) \in \rho$;

dengan $z + u \in R$

maka $(x, y) \in \bar{\rho}$

Dari i) – ii) terbukti bahwa $\bar{\rho}$ adalah kongruensi kansellatif pada R yang memuat ρ . ■

Definisi 3.8 [7] Kongruensi pada semialjabar R atas S disebut reguler kiri jika ρ kansellatif pada hemiring R dan terdapat pasangan $(e_1, e_2) \neq (0, 0)$ dengan $e_1, e_2 \in R$ sedemikian hingga $(x + e_1x, e_2x) \in \rho$ untuk setiap $x \in R$ $(ae_1 + e_2a, e_1a + ae_2) \in \rho$ untuk setiap $a \in S$.

Dapat didefinisikan kongruensi reguler kanan pada semialjabar R atas S yaitu jika ρ kansellatif pada hemiring R dan terdapat

pasangan $(e_1, e_2) \neq (0,0)$ dengan $e_1, e_2 \in R$ sedemikian hingga $(x + xe_1, xe_2) \in \rho$ untuk setiap $x \in R$ $(e_1a + ae_2, ae_1 + e_2a) \in \rho$ untuk setiap $a \in S$.

Jikap kongruensi reguler kanan dan kiripadasemialjabar Ratas S , maka ρ disebut kongruensi reguler.

Lemma 3.9 [7] Jikap kongruensi reguler pada semialjabar R atas S , maka terdapat $e, f \in R$ sedemikian hingga $(x + ex, fx) \in \rho$, $(x + xe, xf) \in \rho$ untuk setiap $x \in R$ dan $(ae + fa, ea + af) \in \rho$ untuk setiap $a \in S$.

Bukti : Diketahui ρ kongruensi reguler pada semialjabar R atas S sehingga ρ merupakan

kongruensi reguler kiri dan kanan. Karena ρ kongruensi reguler kiri pada R , terdapat $e_1', e_2' \in R$ sedemikian hingga $(x + e_1'x, e_2'x) \in \rho$ untuk setiap $x \in R$, dan $(ae_1' + e_2'a, e_1'a + ae_2') \in \rho$ untuk setiap $a \in S$.

Begitu juga karena ρ kongruensi reguler kanan pada R , terdapat $e_1'', e_2'' \in R$ sedemikian hingga $(x + xe_1'', xe_2'') \in \rho$ untuk setiap $x \in R$, dan $(e_1''a + ae_2'', ae_1'' + e_2''a) \in \rho$ untuk setiap $a \in S$. Maka $(e_1' + e_1'', e_2' + e_2'') \in \rho$, $(e_1'e_2'' + e_2'e_1'', e_1'e_2'' + e_2'e_1'') \in \rho$, dan $(e_1' + e_1'', e_1'e_1'' + e_1'e_2'' + e_2'e_1'' + e_2'e_2'') \in \rho$. Dari hasil kombinasi diperoleh $(e_1' + e_1'', e_1'e_1'' + e_1'e_2'' + e_2'e_1'' + e_2'e_2'') \in \rho$, dan $(e_2' + e_2'', e_2'e_1'' + e_2'e_2'') \in \rho$.

Karena ρ adalah kansellatif berarti bahwa $(e_1' + e_1'', e_1' + e_2'e_1'') \in \rho$, dan $(e_2' + e_1'e_2'', e_2' + e_2'e_1'') \in \rho$.

Kombinasi dari kedua yang didapatkan $(e_1' + e_2'' + e_1'e_2'' + e_2'e_1'', e_2' + e_1' + e_1'e_2'' + e_2'e_1'') \in \rho$. Karena ρ adalah kansellatif berarti bahwa $(e_1' + e_2'', e_2' + e_1'') \in \rho$. Oleh karena itu $(e_1'x + e_2''x, e_2'x + e_1''x) \in \rho$, untuk setiap $x \in R$.

Dari

definisi kongruensi reguler kiri diketahui bahwa $(x + e_1'x, e_2'x) \in \rho$, untuk setiap $x \in R$.

Oleh karena itu jika kedua yang di kombinasikan didapatkan $(x + e_1'x + e_2''x + e_1''x, e_1'x + e_2'x + e_2''x) \in \rho$, untuk setiap $x \in R$. Karena ρ adalah kansellatif, maka $(x + e_1''x, e_2''x) \in \rho$, untuk setiap $x \in R$. Sehingga $e_1' = e_1'' = e$ dan $e_2' = e_2'' = f$. ■

Selanjutnya kongruensi reguler kiri (kanan) ρ pada semialjabar R atas S dikatakan kongruensi reguler maksimal kiri (kanan) jika $\rho \neq R \times R$ dan ρ tidak termuat pada kongruensi reguler kiri (kanan) kecuali kongruensi universal.

Lemma 3.10 [7] Setiap kongruensi reguler kiri (kanan) pada semialjabar R atas S termuat dalam kongruensi reguler maksimal kiri (kanan).

Bukti: Diberikan ρ kongruensi reguler kiri pada semialjabar R atas S , berarti terdapat $e_1, e_2 \in R$ sedemikian sehingga $(x + e_1x, e_2x) \in \rho$ untuk setiap $x \in R$, dan $(ae_1 + e_2a, e_1a + ae_2) \in \rho$ untuk setiap $a \in S$. Terdapat penutup transitif dari ρ yaitu $\rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ yang merupakan kongruensi maksimal. Karena ρ^* merupakan kongruensi maksimal yang dibangun oleh kongruensi reguler kiri ρ , maka ρ^* juga kongruensi reguler kiri yaitu terdapat $e_1, e_2 \in R$ sedemikian sehingga $(x + e_1x, e_2x) \in \rho^*$ untuk setiap $x \in R$, dan $(ae_1 + e_2a, e_1a + ae_2) \in \rho^*$ untuk setiap $a \in S$. Oleh karena itu $\rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ merupakan kongruensi reguler maksimal kiri.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\rho \subset \rho^*$

$\rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$.

Diambil $n = 1$, sehingga $\rho^1 = \rho \subset \rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$.

Jadi,

setiap kongruensi reguler kiri termuat dalam kongruensi reguler maksimal kiri. ■

Contoh : Diberikan hemiring $R = \mathbb{Z}_4$ yaitu hemiring bilangan bulat modulo 4, dan $S = \mathbb{Z}^+$ hemiring bilangan bulat tak negatif. Diketahui R semialjabar atas S . Relasi $\rho =$

$\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{3}), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, e_2 + z) \in \rho$.
pada semialjabar R atas S merupakan kongruensi reguler maksimal.

Definisi 3.11 [7] Pasangan $(e_1, e_2) \in R \times R$ dengan $(e_1, e_2) \neq (0, 0)$ dari hemiring R disebut pasangan identitas kiri jika $x + e_1x = e_2x$, untuk setiap $x \in R$. Sedangkan pasangan $(e_1, e_2) \in R \times R$ disebut pasangan identitas kanan jika $x + xe_1 = xe_2$, untuk setiap $x \in R$.

Definisi 3.12 [7] Hemiring R disebut hemiring dengan kongruensi kansellatif bebas jika kongruensi universal dan kongruensi identitas merupakan kongruensi kansellatif pada R .

Lemma 3.13 [7] Misalkan R hemiring dengan kongruensi kansellatif bebas. Jika (e_1, e_2) adalah pasangan identitas kiri dari R , maka (e_1, e_2) juga pasangan identitas kanan.

Bukti

: Misalkan (e_1, e_2) adalah pasangan identitas kiri. Maka $x + e_1x = e_2x$ untuk setiap $x \in R$.

Pandang

$\rho = \{(a + r + re_1, a + re_2) : a, r \in R\} \cup \{(a + re_2, a + r + re_1) : a, r \in R\} \cup \Delta_R$,
dimana $\Delta_R = \{(r, r) : r \in R\}$. Maka ρ bersifat refleksi dan simetris. Misalkan $(x, y) \in \rho$ dan $z \in R$. Maka (x, y) adalah $(a + r + re_1, a + re_2)$ atau $(a + re_2, a + r + re_1)$ atau (r, r) untuk $a, r \in R$. Setidaknya $(xz, yz) \in \Delta_R \subseteq \rho$ dan $(zx, zy) \in \rho$ serta $(x + z, y + z) \in \rho$. Maka penutup transitif dari ρ yaitu $\rho^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$ merupakan relasi kongruensi. Anggap $\bar{\rho}^*$ sebagai kongruensi kansellatif (sesuai lemma 3.7). Andaikan $(e_1, e_2) \in \bar{\rho}^*$. Terdapat $z \in R$, sedemikian sehingga $(e_1 + z, e_2 + z) \in \rho^n$. Maka $(e_1 + z, e_2 + z) \in \rho^n$ untuk bilangan bulat positif n , dengan kata lain terdapat $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in R$ sedemikian sehingga $(e_1 +$

Maka $(e_1x + zx, x_1x), (x_1x, x_2x), \dots, (x_{n-1}x, e_2x + zx) \in \Delta_R \subseteq \rho$ untuk setiap $x \in R$. Oleh karena itu $e_1x + zx = x_1x = x_2x = \dots = x_{n-1}x = e_2x + zx$ untuk setiap $x \in R$. Sehingga $e_1x + zx = e_2x + zx$ untuk setiap $x \in R$. Maka $e_1x = e_2x$. Tetapi $x + e_1x = e_2x$ untuk setiap $x \in R$. Akibatnya $x = 0$ untuk setiap $x \in R$, yang berarti kontradiksi. Oleh karena itu $(e_1, e_2) \notin \bar{\rho}^*$. Karena R adalah hemiring dengan kongruensi kansellatif bebas, diperoleh $\bar{\rho}^* = \Delta_R$, yang berarti bahwa $a + r + re_1 = a + re_2$ untuk setiap $a, r \in R$. Maka $r + re_1 = re_2$ untuk setiap $r \in R$. Oleh karena itu (e_1, e_2) adalah pasangan identitas kanan. ■

Lemma 3.14 [7] Diberikan ρ kongruensi reguler maksimal kiri (kanan) pada semialjabar Ratas S . Maka ρ adalah reguler.

Bukti : Misalkan $(e_1, e_2) \in R \times R$ seperti definisi 3.8. Karena ρ adalah kongruensi reguler maksimal kiri pada R , himpunan kelas-kelas kongruensi R/ρ yang didefinisikan oleh $R/\rho = \{xp | x \in R\}$ adalah hemiring kansellatif penjumlahan, hemiring dengan kongruensi kansellatif bebas.

Di dalam R/ρ , $x\rho + e_1x\rho = e_2x\rho$ untuk setiap $x\rho \in R/\rho$. Oleh karena itu dari lemma 3.13 diperoleh,

$x\rho + x\rho e_1\rho = x\rho e_2\rho$ untuk setiap $x\rho \in R/\rho$.

Dengan kata lain $(x + xe_1, xe_2) \in \rho$ untuk setiap $x \in R$.

Oleh karena itu ρ adalah reguler kanan. ■

Teorema 3.15 [7] Diberikan R semialjabar atas S . Kongruensi ρ adalah kongruensi reguler maksimal pada semialjabar R atas S jika dan hanya jika ρ adalah kongruensi reguler maksimal pada hemiring R .

Bukti : $(\Leftarrow)$ Diketahui ρ adalah kongruensi reguler maksimal pada

hemiring R dan diberikan $(e_1, e_2) \in R \times R$ seperti definisi 3.8.

Maka $(x + e_1x, e_2x) \in \rho$ dan $(x + xe_1, xe_2) \in \rho$ untuk setiap $x \in R$.

Untuk setiap $a \in S$ dan $x \in R$, diperoleh $(ax + e_1(ax), e_2(ax)) \in \rho$ dan $(ax + (ax)e_1, (ax)e_2) \in \rho$.

Misalkan $(x, y) \in \rho$, maka untuk setiap $a \in S$, $((e_1a)x, (e_1a)y) \in \rho$ dan $((e_2a)x, (e_2a)y) \in \rho$ yang berarti $((e_1a)x + (e_2a)y, (e_1a)y + (e_2a)x) \in \rho$.

Dengan kata lain $(e_1(ax) + e_2(ay), e_1(ay) + e_2(ax)) \in \rho$ (i)

$(ax + e_1(ax) + e_2(ay), ay + e_1(ay) + e_2(ax)) \in \rho$ (ii)

Dari (i) dan (ii) dengan sifat kansellasi diperoleh $(ax, ay) \in \rho$.

Dengan cara yang samaya itu untuk setiap $a \in S$, $(x(ae_1), y(ae_1)) \in \rho$ dan $(x(ae_2), y(ae_2)) \in \rho$ yang berarti $(x(ae_1) + y(ae_2), y(ae_1) + x(ae_2)) \in \rho$.

Dengan kata lain $((xa)e_1 + (ya)e_2, (ya)e_1 + (xa)e_2) \in \rho$ (iii)

$(xa + (xa)e_1 + (ya)e_2, ya + (ya)e_1 + (xa)e_2) \in \rho$ (iv)

Dari (iii) dan (iv) dengan sifat kansellasi diperoleh $(xa, ya) \in \rho$.

Oleh karena itu adalah kongruensi pada semialjabar atas S .

Selanjutnya untuk setiap $a \in S$, $(ae_1 + e_1(ae_1), e_2(ae_1)) \in \rho$ dan $((e_1a)e_2, e_1a + (e_1a)e_1) \in \rho$. Oleh karena itu $(ae_1 + e_1(ae_1) + (e_1a)e_2, e_1a + (e_1a)e_1 + e_2(ae_1)) \in \rho$, untuk setiap $a \in S$. Dengan kata lain $(ae_1 + (e_1a)e_1 + (e_1a)e_2, e_1a + (e_1a)e_1 + e_2(ae_1)) \in \rho$, untuk setiap $a \in S$. Dengan sifat kansellasi diperoleh $(ae_1 + (e_1a)e_2, e_1a + e_2(ae_1)) \in \rho$ (v)

Selanjutnya untuk setiap $a \in S$, $(e_2a + (e_2a)e_1, (e_2a)e_2) \in \rho$ dan $(e_2(ae_2), ae_2 + e_1(ae_2)) \in \rho$. Oleh karena itu $(e_2a + (e_2a)e_1 + e_2(ae_2), ae_2 + e_1(ae_2) +$

$(e_2a)e_2) \in \rho$, untuk setiap $a \in S$. Dengan kata lain $(e_2a + (e_2a)e_1 + (e_2a)e_2, ae_2 + e_1(ae_2) + (e_2a)e_2) \in \rho$, untuk setiap $a \in S$. Dengan sifat kansellasi diperoleh $(e_2a + (e_2a)e_1, ae_2 + e_1(ae_2)) \in \rho$ (vi)

Dari (v) dan (vi) diperoleh $(ae_1 + (e_1a)e_2 + e_2a + (e_2a)e_1, e_1a + e_2(ae_1) + ae_2 + e_1(ae_2)) \in \rho$ untuk setiap $a \in S$.

Dengan sifat kansellasi diperoleh $(ae_1 + e_2a, e_1a + ae_2) \in \rho$ untuk setiap $a \in S$.

Oleh karena itu adalah kongruensi reguler pada semialjabar atas S .

Andaikan ρ' adalah kongruensi pada semialjabar atas S sedemikian sehingga $\rho \subseteq \rho'$. Maka ρ' merupakan kongruensi reguler pada hemiring R , $\rho' = \rho$ atau $\rho' = R \times R$. Oleh karena itu ρ adalah kongruensi reguler maksimal pada semialjabar atas S .

$(\Rightarrow)$ Diketahui ρ adalah kongruensi reguler maksimal pada semialjabar atas S . Maka ρ adalah kongruensi reguler pada hemiring R . Dengan lemma 3.10, ρ termuat di dalam kongruensi reguler maksimal ρ' pada hemiring R . Dari pembuktian pertama ρ' adalah kongruensi reguler maksimal pada semialjabar atas S , oleh karena itu $\rho = \rho'$. ■

4. PENUTUP

Dari pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa R semialjabar atas S merupakan struktur aljabar yang terbentuk dari dua hemiring R dan S dimana R bi-semimodul atas S sedemikian hingga $(ax)b = a(xb)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$.

Kongruensi ρ pada R semialjabar atas S merupakan kongruensi pada hemiring R yang bersifat *compatible* kanan dan *compatible* kiri untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$.

Jika kongruensi ρ pada R semialjabar atas S bersifat kansellatif maka disebut kongruensi kansellatif. Selanjutnya

kongruensi kansellatif pada R semialjabar atas S disebut kongruensi reguler jika terdapat $e, f \in R$ sedemikian sehingga kongruensi tersebut bersifat reguler kiri dan reguler kanan. Kongruensi reguler ρ pada R semialjabar atas S disebut kongruensi reguler maksimal jika $\rho \neq R \times R$ dan tidak termuat pada kongruensi reguler lain. Kongruensi ρ merupakan kongruensi reguler maksimal pada semialjabar R atas S jika hanya jika ρ adalah kongruensi reguler maksimal pada hemiring R .

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Acharyya, S. K, Chattopadhyay, K. C and Ray, G. G. 2002. *Hemiring-homomorphisms, Stone Chech Compactification and Hewitt Realcompactification*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, No. 26, hal: 363-373.
- [2] Dudek, W. A., Shabir, M., and Anjum, R. 2010. *Characterizations of Hemirings by Their h -Ideals*.
- [3] Gilbert, Jimmie and Linda Gilbert. 1984. *Elements of Modern Algebra*. PWS-Kent Publishing Company. Boston.
- [4] Herstein, I. N. 1976. *Topics in Algebra*. Jhon Willey and Sons. United States of America.
- [5] Howie, J. M. 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press. London.
- [6] Lipschutz, Seymour. 1985. *Teori Himpunan*. Erlangga. Jakarta.
- [7] Sen, M. K. and Bandyopadhyay, S. 1993. *Structure Space of A Semialgebra Over A Hemiring*. Kyungpook Mathematical Journal, Vol. 33, No. 1, hal: 25-36.
- [8] Tim Dosen Pengampu Mata Kuliah Aljabar I. 2006. *Buku Ajar Aljabar I*. FMIPA Undip. Semarang.